數學傳播　49卷1期, pp. 69-79

# 四邊形的蝴蝶定理

辛佳佑 · 廖昱喆 · 陳威廷 · 楊玉星

**關鍵字**: 蝴蝶定理、坎迪定理、四邊形。

## 一、前言

關於蝴蝶定理 (*Butterfly Theorem*), 如圖 1, 過圓內弦 $\overline{PQ}$ 的中點 $M$ 任作兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$, 連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交弦 $\overline{PQ}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\overline{XM}=\overline{MY}$。除此之外, 文獻也針對蝴蝶形的連接方式、弦 $\overline{PQ}$、$M$ 點的位置和外接其他圓錐曲線作發想, 而有一些推廣的性質。如圖 2, 若將蝴蝶形外接的圓形改成四邊形, 那蝴蝶形是否也會有類似的性質? 於是我們決定繼續推廣蝴蝶定理, 看能否有更多不一樣的發現。

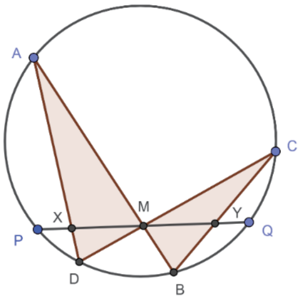


圖 1

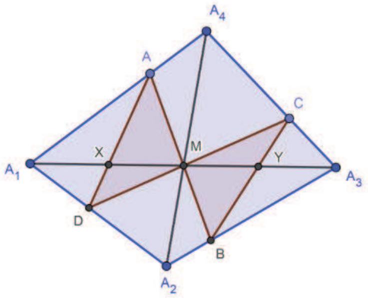


圖 2

## 二、名詞定義

(一) 蝴蝶形: 如圖 3, 凸四邊形的對角線相連, 所產生四個角形, 兩個不相鄰的三角形所構成。(參 [1])

(二) 蝴蝶形的中心: 如圖 3, 蝴蝶形中, 兩個三角形共用的頂點。(參 [1])

(三) 蝴蝶線: 如圖 4, 通過蝴蝶形的中心並與蝴蝶形兩側相交的直線。(參 [1])

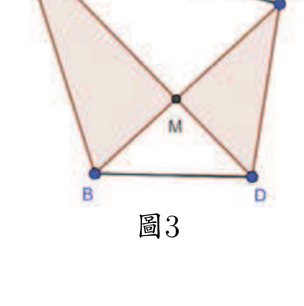


圖3

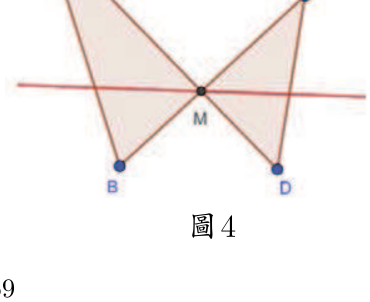


圖 4

(四) 坎迪定理 (*Candy Theorem*) (參 [3])

如圖 5, 設 $\overline{PQ}$ 爲圓內一條弦, 過 $\overline{PQ}$ 上一點 $M$ 任作兩弦 $\overline{AB}$ 和 $\overline{CD}$, 若連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別與 $\overline{PQ}$ 交於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\dfrac{1}{\overline{XM}}-\dfrac{1}{\overline{YM}}=\dfrac{1}{\overline{PM}}-\dfrac{1}{\overline{QM}}$。

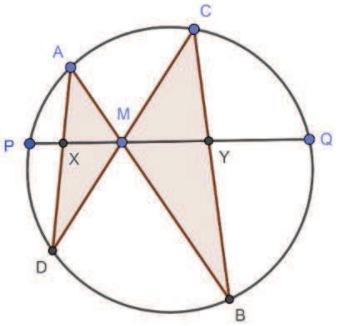

圖5

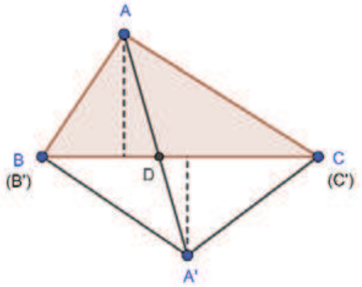

圖6

(五) 共邊定理 (參 [5])

如圖 6, 設 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 共邊 $(\overline{BC}=\overline{B'C'})$, 且 $D$ 是 $\overline{BC}$ 和 $\overline{AA'}$ 的交點, $A'\neq D$, 則 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AD}}{\overline{A'D}}$。這裡 $\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面積。

(六) 共角定理 (參 [5])

如圖 7 和 8, 設 $\angle ABC$ 和 $\angle A'B'C'$ 相等或互補, 即 $\angle ABC=\angle A'B'C'$ 或 $\angle ABC+\angle A'B'C'=180°$, 則 $\dfrac{\triangle ABC}{\triangle A'B'C'}=\dfrac{\overline{AB}\times\overline{BC}}{\overline{A'B'}\times\overline{B'C'}}$。這裡 $\triangle ABC$ 表示 $\triangle ABC$ 的面積。

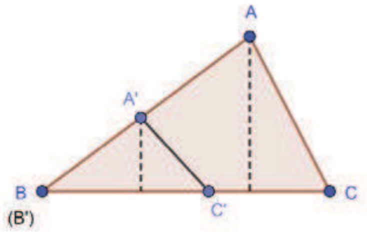

圖7

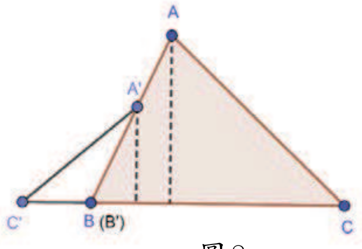

圖8

## 三、四邊形的蝴蝶定理

根據四邊形對邊是否平行與對角線是否平分, 分成梯形、平行四邊形、一條對角線被平分的四邊形、任意四邊形做討論, 而有以下的定理:

(一) 定理 1 (參 [2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲梯形, $\overline{PQ}$ 爲平行上下底 $\overline{A_1A_2}$、$\overline{A_3A_4}$ 的截線段, 以 $\overline{PQ}$ 爲蝴蝶線, $\overline{PQ}$ 上任一點 $M$ 爲蝴蝶中心, 若蝴蝶形 $ABCD$ 的頂點分別落在上下底, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overline{PQ}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。(梯形之蝴蝶定理)

(此定理是作者的創見)

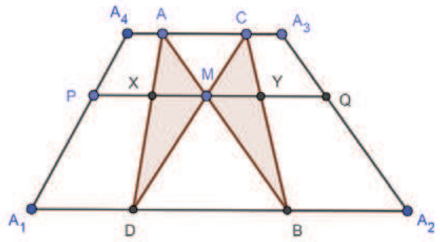

圖9

**證明**: 如圖 9, 因爲 $\overline{PQ}//\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_4}$, 所以 $\dfrac{\overline{XM}}{\overline{DB}}=\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{DB}}$, 從而 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

(二) 定理 2 (參 [2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲平行四邊形, 以對角線的交點 $M$ 爲蝴蝶中心, 一組對邊 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$ 的中點連線 $\overline{PQ}$ 爲蝴蝶線, 若蝴蝶形ABCD 的頂點不全落在一組對邊上, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overline{PQ}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。若進一步以 M 爲中心將蝴蝶線 $\overline{PQ}$ 旋轉成蝴蝶線 $\overline{P'Q'}$, 且 $\overline{AD}$ 和 $\overline{CB}$ 分別交 $\overline{P'Q'}$ 於 $X'$、$Y'$ 兩點, 則 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$。(平行四邊形之蝴蝶定理) (此定理是作者的創見)

**證明**:

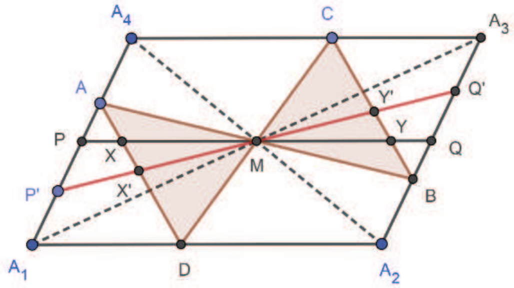

圖 10

(1) 如圖 10, 因爲 $\overline{A_1A_4}//\overline{A_2A_3}$, 所以 $\angle APM=\angle BQM$, $\overline{PM}=\overline{QM}$, $\angle AMP=\angle BMQ$, 推得 $\triangle AMP\simeq\triangle BMQ$ (ASA), 從而 $\overline{AM}=\overline{MB}$。又 $\overline{PQ}//\overline{A_1A_2}//\overline{A_3A_4}$, 所以 $\overline{CM}=\overline{MD}$, 且 $\angle AMD=\angle BMC$, 推得 $\triangle AMD\simeq\triangle BMC$ (SAS), 從而 $\angle MAX=\angle MBY$, 推得 $\triangle AMX\simeq\triangle BMY$ (ASA), 故 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

(2) 因爲 $\angle MAD=\angle MBC$, 所以 $\overline{AD}//\overline{CB}$, 從而 $\angle MXX'=\angle MYY'$, 且 $\overline{MX}=\overline{MY}$、$\angle XMX'=\angle YMY'$, 推得 $\triangle MXX'\simeq\triangle MYY'$ (ASA), 故 $\overline{MX'}=\overline{MY'}$。

(三) 定理 3 (參 [4])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲一條對角線 $\overline{A_1A_3}$ 被另一條 $\overline{A_2A_4}$ 平分的四邊形, 以 $\overline{A_1A_3}$ 爲蝴

蝶線, $\overline{A_1A_3}$ 的中點 $M$ 爲蝴蝶中心, 若蝴蝶形 $ABCD$ 的頂點分別落在四邊形的四條邊或邊的延長線上, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。(四邊形之蝴蝶定理)

**證明**: (參考資料 [4] 的證法)

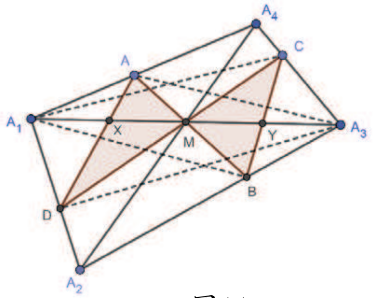


圖11

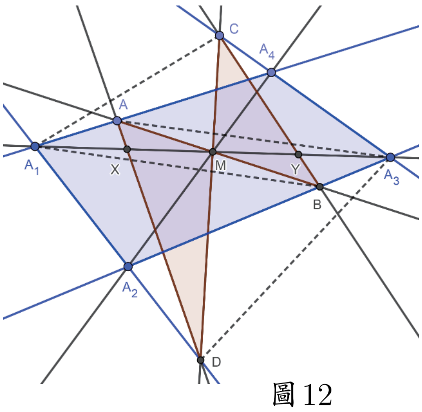


圖12

如圖 11 和 12, 由共邊、共角定理, 及 $\overline{A_1M}=\overline{A_3M}$ 可得

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}&=\frac{\triangle MAD}{\triangle A_1AD}=\frac{\triangle MAD}{\triangle MBC}\times\frac{\triangle MBC}{\triangle A_3BC}\times\frac{\triangle A_3BC}{\triangle A_3A_2A_4}\times\frac{\triangle A_3A_2A_4}{\triangle A_1A_2A_4}\times\frac{\triangle A_1A_2A_4}{\triangle A_1DA}\\&=\frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}\\&=\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times 1\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}\\&=\frac{\triangle A_1A_3A}{\triangle A_1A_3B}\times\frac{\triangle A_1A_3D}{\triangle A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\triangle A_1A_3B}{\triangle A_1A_3A_2}\times\frac{\triangle A_1A_3C}{\triangle A_1A_3A_4}\times\frac{\triangle A_1A_3A_2}{\triangle A_1A_3D}\\&\quad\times\frac{\triangle A_1A_3A_4}{\triangle A_1A_3A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}},\end{aligned}$$

由合比性質得 $\dfrac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\Longrightarrow\dfrac{\overline{MX}}{\overline{MX}+\overline{A_1X}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{MY}+\overline{A_3Y}}$, $\dfrac{\overline{MX}}{\overline{A_1M}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{A_3M}}$,

故 $\overline{MX}=\overline{MY}$。

(四) 定理 4 (參 [2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲一條對角線 $\overline{A_1A_3}$ 被另一條 $\overline{A_2A_4}$ 平分於 $O$ 的四邊形, $\overline{A_1O}=\overline{A_3O}$, 以 $\overline{A_1A_3}$ 爲蝴蝶線, $\overline{A_1A_3}$ 上一點 $M$ 爲蝴蝶中心, 若蝴蝶形 $ABCD$ 的頂點分別落在四邊形的四條邊或邊的延長線上, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\dfrac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}}$。可改寫成 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\dfrac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}=1$。(四邊形之蝴蝶延伸定理)

(此定理是作者的創見)

**證明:**

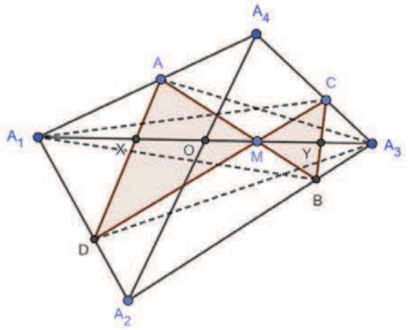


圖13

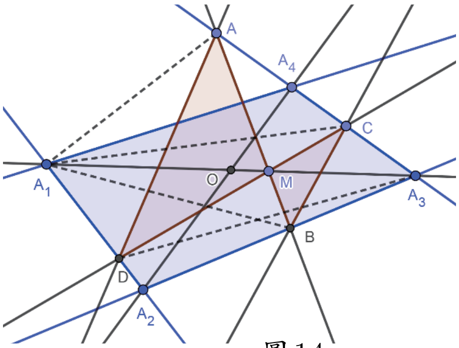


圖14

如圖 13 和 14, 由共邊、共角定理, 及 $\overline{A_1O}=\overline{A_3O}$ 可得

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}} &= \frac{\triangle MAD}{\triangle A_1AD}=\frac{\triangle MAD}{\triangle MBC}\times\frac{\triangle MBC}{\triangle A_3BC}\times\frac{\triangle A_3BC}{\triangle A_3A_2A_4}\times\frac{\triangle A_3A_2A_4}{\triangle A_1A_2A_4}\times\frac{\triangle A_1A_2A_4}{\triangle A_1DA}\\
&= \frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}\\
&= \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times 1\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}\\
&= \frac{\triangle A_1A_3A}{\triangle A_1A_3B}\times\frac{\triangle A_1A_3D}{\triangle A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\triangle A_1A_3B}{\triangle A_1A_3A_2}\times\frac{\triangle A_1A_3C}{\triangle A_1A_3A_4}\times\frac{\triangle A_1A_3A_2}{\triangle A_1A_3D}\\
&\quad\times\frac{\triangle A_1A_3A_4}{\triangle A_1A_3A}=\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}},
\end{aligned}$$

由合比性質得 $\dfrac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\Longrightarrow\dfrac{\overline{MX}}{\overline{MX}+\overline{A_1X}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{MY}+\overline{A_3Y}}$, 故 $\dfrac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}}=\dfrac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}}$。
若將原式的左式移項, 可得 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\dfrac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}=1$。

(五) 定理 5 (參 [5])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲任意四邊形, 以 $\overline{A_1A_3}$ 爲蝴蝶線, 兩對角線交點 $M$ 爲蝴蝶中心, 若蝴蝶形 $ABCD$ 的頂點分別落在四邊形的四條邊或邊的延長線上, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MY}}=\dfrac{1}{\overline{MA_1}}-\dfrac{1}{\overline{MA_3}}$。可改寫成 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\dfrac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\dfrac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}}=1$。(四邊形之坎迪定理)

**證明**: (參考資料 [4] 的證法)

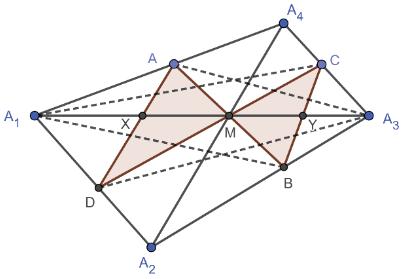


圖15

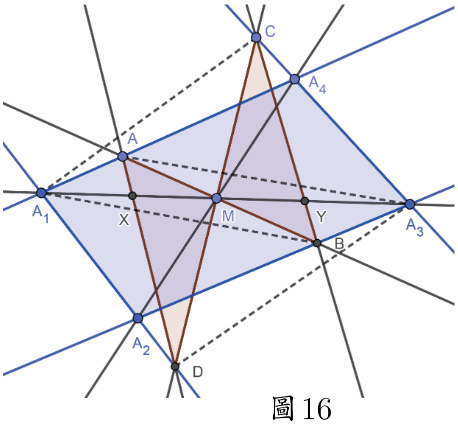


圖16

如圖 15 和 16, 由共邊、共角定理可得

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}} &= \frac{\triangle MAD}{\triangle A_1AD} = \frac{\triangle MAD}{\triangle MBC}\times\frac{\triangle MBC}{\triangle A_3BC}\times\frac{\triangle A_3BC}{\triangle A_3A_2A_4}\times\frac{\triangle A_3A_2A_4}{\triangle A_1A_2A_4}\times\frac{\triangle A_1A_2A_4}{\triangle A_1DA}\\
&= \frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}\\
&= \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}\times\frac{\overline{MD}}{\overline{MC}}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}\\
&= \frac{\triangle A_1A_3A}{\triangle A_1A_3B}\times\frac{\triangle A_1A_3D}{\triangle A_1A_3C}\times\frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\triangle A_1A_3B}{\triangle A_1A_3A_2}\times\frac{\triangle A_1A_3C}{\triangle A_1A_3A_4}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\\
&\quad\times\frac{\triangle A_1A_3A_2}{\triangle A_1A_3D}\times\frac{\triangle A_1A_3A_4}{\triangle A_1A_3A} = \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}},\end{aligned}$$

推得 $\dfrac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}} = \dfrac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}}\times\dfrac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}} \Longrightarrow \dfrac{\overline{MX}}{\overline{MA_1}-\overline{MX}} = \dfrac{\overline{MY}}{\overline{MA_3}-\overline{MY}}\times\dfrac{\overline{MA_3}}{\overline{MA_1}}$,

取倒數 $\dfrac{\overline{MA_1}-\overline{MX}}{\overline{MX}} = \dfrac{\overline{MA_3}-\overline{MY}}{\overline{MY}}\times\dfrac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_3}}$ 化簡 $\dfrac{\overline{MA_1}}{\overline{MX}}-1 = \Big(\dfrac{\overline{MA_3}}{\overline{MY}}-1\Big)\times\dfrac{\overline{MA_1}}{\overline{MA_3}}$,

推得 $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MA_1}} = \dfrac{1}{\overline{MY}}-\dfrac{1}{\overline{MA_3}}$, 即 $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MY}} = \dfrac{1}{\overline{MA_1}}-\dfrac{1}{\overline{MA_3}}$。

若將原式的左式移項, 可得 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\dfrac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\dfrac{\overline{A_3M}}{\overline{MA_1}} = 1$。

(六) 定理 6 (參 [6])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲任意四邊形, 以 $\overline{A_1A_3}$ 爲蝴蝶線, $\overline{A_1A_3}$ 上一點 $M$ 爲蝴蝶中心, 若蝴蝶形 $ABCD$ 的頂點分別落在四邊形的四條邊或邊的延長線上, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}}\times\dfrac{\overline{MY}}{\overline{YA_3}}\times\dfrac{\overline{A_3O}}{\overline{OA_1}}=1$。(四邊形之坎迪延伸定

理 1)

**證明**: (參考資料 [6] 的證法)

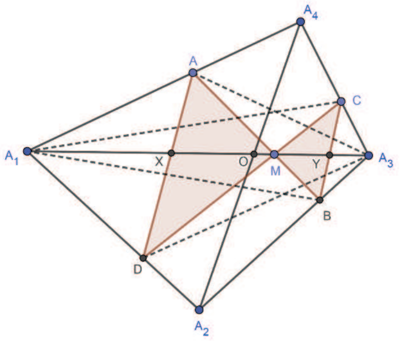


圖17

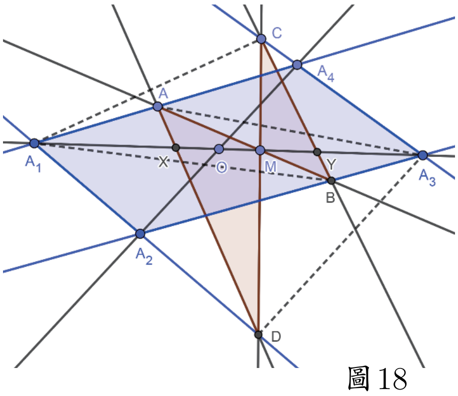


圖18

如圖 17 和 18, 由共邊、共角定理可得

$$\begin{aligned}\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}} &= \frac{\triangle MAD}{\triangle A_1AD} = \frac{\triangle MAD}{\triangle MBC} \times \frac{\triangle MBC}{\triangle A_3BC} \times \frac{\triangle A_3BC}{\triangle A_3A_2A_4} \times \frac{\triangle A_3A_2A_4}{\triangle A_1A_2A_4} \times \frac{\triangle A_1A_2A_4}{\triangle A_1DA}\\
&= \frac{\overline{MA}\times\overline{MD}}{\overline{MB}\times\overline{MC}} \times \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}} \times \frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}} \times \frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}} \times \frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}\\
&= \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{MD}}{\overline{MC}} \times \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}} \times \frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}} \times \frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}} \times \frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}} \times \frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}} \times \frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}\\
&= \frac{\triangle A_1A_3A}{\triangle A_1A_3B} \times \frac{\triangle A_1A_3D}{\triangle A_1A_3C} \times \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}} \times \frac{\triangle A_1A_3B}{\triangle A_1A_3A_2} \times \frac{\triangle A_1A_3C}{\triangle A_1A_3A_4} \times \frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}\\
&\quad \times \frac{\triangle A_1A_3A_2}{\triangle A_1A_3D} \times \frac{\triangle A_1A_3A_4}{\triangle A_1A_3A} = \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}} \times \frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}},\end{aligned}$$

推得 $\frac{\overline{MX}}{\overline{A_1X}} = \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}} \times \frac{\overline{A_3O}}{\overline{A_1O}}$, 從而 $\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XM}} \times \frac{\overline{MY}}{\overline{A_3Y}} \times \frac{\overline{A_3O}}{\overline{OA_1}} = 1$。

(七) 定理 7 (參 [4])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲任意四邊形, 以 $\overline{A_1A_3}$ 爲蝴蝶割線, $\overline{A_2A_4}$ 上一點 $N$ 爲蝴蝶中心, 若蝴蝶形 $ABCD$ 的頂點分別落在四邊形的四條邊或邊的延長線上, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 再連接 $A$、$B$ 和 $C$、$D$ 分別交 $\overleftrightarrow{A_1A_3}$ 於 $T$、$S$ 兩點, 則

$$\frac{\overline{A_1X}}{\overline{XS}} \times \frac{\overline{TY}}{\overline{YA_3}} \times \frac{\overline{A_3S}}{\overline{TA_1}} = 1\text{。可改寫成 } \frac{\left(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}}\right)}{\overline{XS}} - \frac{\left(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}}\right)}{\overline{YT}} = \frac{1}{\overline{A_1T}} - \frac{1}{\overline{A_3S}}\text{。}$$

(四邊形之坎迪延伸定理2)

**證明**: (以下證法是作者的創見)

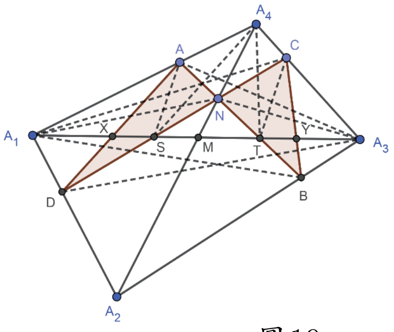


圖 19

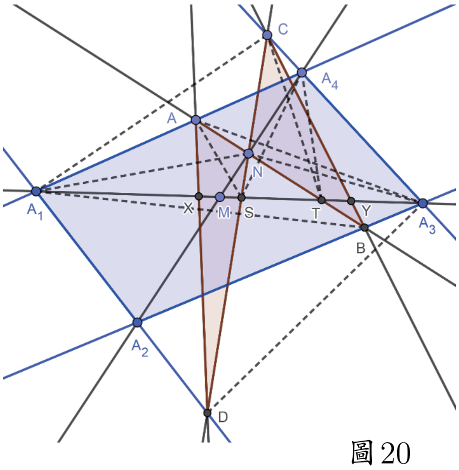


圖 20

如圖 19 和 20, 由共邊、共角定理可得

$$(1)\frac{\overline{SX}}{\overline{A_1X}}=\frac{\triangle SAD}{\triangle A_1AD}=\frac{\triangle SAD}{\triangle NAD}\times\frac{\triangle NAD}{\triangle NBC}\times\frac{\triangle NBC}{\triangle TBC}\times\frac{\triangle TBC}{\triangle A_3BC}\times\frac{\triangle A_3BC}{\triangle A_3A_2A_4}$$

$$\times\frac{\triangle A_3A_2A_4}{\triangle A_1A_2A_4}\times\frac{\triangle A_1A_2A_4}{\triangle A_1DA}$$

$$=\frac{\overline{SD}}{\overline{ND}}\times\frac{\overline{NA}\times\overline{ND}}{\overline{NB}\times\overline{NC}}\times\frac{\overline{NB}}{\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}\times\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_2}\times\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}\times\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1D}\times\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{A_3B}}{\overline{A_3A_2}}\times\frac{\overline{A_3C}}{\overline{A_3A_4}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{A_1A_2}}{\overline{A_1D}}\times\frac{\overline{A_1A_4}}{\overline{A_1A}}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\triangle A_1A_3B}{\triangle A_1A_3A_2}\times\frac{\triangle A_1A_3C}{\triangle A_1A_3A_4}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}$$

$$\times\frac{\triangle A_1A_3A_2}{\triangle A_1A_3D}\times\frac{\triangle A_1A_3A_4}{\triangle A_1A_3A}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\triangle A_1A_3B}{\triangle A_1A_3A}\times\frac{\triangle A_1A_3C}{\triangle A_1A_3D}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}$$

$$=\frac{\overline{SD}\times\overline{NA}}{\overline{NC}\times\overline{TB}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}\times\frac{\overline{TB}}{\overline{TA}}\times\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}$$

$$=\frac{\overline{NA}\times\overline{SC}}{\overline{NC}\times\overline{TA}}\times\frac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}\times\frac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}.$$

(2) 欲證 $\dfrac{\overline{NA}\times\overline{SC}}{\overline{NC}\times\overline{TA}}\times\dfrac{\overline{A_3M}}{\overline{A_1M}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_1T}}\Leftrightarrow\dfrac{\overline{NA}}{\overline{TA}}\times\dfrac{\overline{SC}}{\overline{NC}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_3M}}\times\dfrac{\overline{A_1M}}{\overline{A_1T}}$

$$\Leftrightarrow \frac{\triangle A_1A_4N}{\triangle A_1A_4T}\times\frac{\triangle A_3A_4S}{\triangle A_3A_4N}=\frac{\triangle A_3A_4S}{\triangle A_3A_4M}\times\frac{\triangle A_1A_4M}{\triangle A_1A_4T}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\triangle A_1A_4N}{\triangle A_3A_4N}=\frac{\triangle A_1A_4M}{\triangle A_3A_4M}\Leftrightarrow\frac{\overline{A_1M}}{\overline{A_3M}}=\frac{\overline{A_1M}}{\overline{A_3M}},\text{得證。}$$

由 (1)(2) 可知: $\dfrac{\overline{SX}}{\overline{A_1X}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_1T}}\times\dfrac{\overline{TY}}{\overline{A_3Y}}$, 推得 $\dfrac{\overline{SX}}{\overline{A_1S}-\overline{SX}}=\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{A_1T}}\times\dfrac{\overline{TY}}{\overline{A_3T}-\overline{TY}}$,

取倒數 $\dfrac{\overline{A_1S}-\overline{SX}}{\overline{SX}}=\dfrac{\overline{A_1T}}{\overline{A_3S}}\times\dfrac{\overline{A_3T}-\overline{TY}}{\overline{TY}}$, 化簡 $\dfrac{\overline{A_1S}}{\overline{SX}}-1=\dfrac{\overline{A_1T}}{\overline{A_3S}}\times\left(\dfrac{\overline{A_3T}}{\overline{TY}}-1\right)\Rightarrow$

$\dfrac{\left(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}}\right)}{\overline{SX}}-\dfrac{1}{\overline{A_1T}}=\dfrac{\left(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}}\right)}{\overline{TY}}-\dfrac{1}{\overline{A_3S}}$, 即 $\dfrac{\left(\frac{\overline{A_1S}}{\overline{A_1T}}\right)}{\overline{XS}}-\dfrac{\left(\frac{\overline{A_3T}}{\overline{A_3S}}\right)}{\overline{YT}}=\dfrac{1}{\overline{A_1T}}-\dfrac{1}{\overline{A_3S}}$。

若將原式的左式移項, 可得 $\dfrac{\overline{A_1X}}{\overline{XS}}\times\dfrac{\overline{TY}}{\overline{YA_3}}\times\dfrac{\overline{A_3S}}{\overline{TA_1}}=1$。

## 四、四邊形的蝴蝶定理之一般化

一般四邊形的蝴蝶線不一定要侷限於對角線, 也可能是四邊形任意兩邊的截線段, 於是分成對邊、鄰邊的截線段做討論, 而有以下的定理:

(一) 以對邊的截線段爲蝴蝶線

定理 8 (參 [2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲任意四邊形, $\overline{PQ}$ 爲和對邊 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_2A_3}$ 相交的截線段, 以 $\overline{PQ}$ 爲蝴蝶線, $\overline{PQ}$ 上任一點 $M$ 爲蝴蝶中心, 設 $\overleftrightarrow{A_1A_4}$ 和 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 相交於 $E$ 點, 過 $M$ 點作一截線段 $\overline{AB}$, 連接 $\overleftrightarrow{EM}$、$\overleftrightarrow{QB}$ 相交於 $F$ 點, 並連接 $\overleftrightarrow{PF}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於 $D$ 點, 再連接 $\overleftrightarrow{DM}$ 交 $\overleftrightarrow{A_2A_3}$ 於 $C$ 點, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$ 分別交 $\overline{PQ}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MY}}=\dfrac{1}{\overline{MP}}-\dfrac{1}{\overline{MQ}}$。(坎迪定理) 若 $\overline{MP}=\overline{MQ}$, 則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。(蝴蝶定理) (此定理是作者的創見)

**證明**: 如圖 21, 蝴蝶形 $ABCD$ 可以視爲以兩對角線交點 $M$ 爲中心的四邊形 $PEQF$ 之蝴蝶形, 故由定理 5 可知: $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MY}}=\dfrac{1}{\overline{MP}}-\dfrac{1}{\overline{MQ}}$。

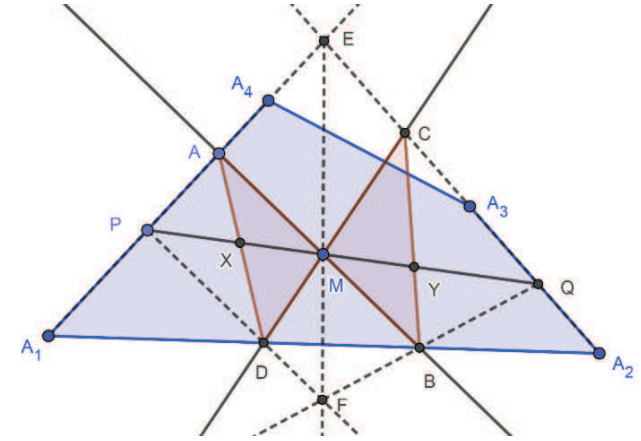


圖21

(二) 以鄰邊的截線段爲蝴蝶線

定理 9 (參 [2])

設四邊形 $A_1A_2A_3A_4$ 爲任意四邊形, $\overline{PQ}$ 爲和鄰邊 $\overline{A_1A_4}$、$\overline{A_3A_4}$ 相交的截線段, 以 $\overline{PQ}$ 爲蝴蝶線, $\overline{PQ}$ 上任一點 $M$ 爲蝴蝶中心, 過 $M$ 點作一截線段 $\overline{AB}$, 連接 $\overleftrightarrow{A_4M}$、$\overleftrightarrow{QB}$ 相交於 $F$ 點, 並連接 $\overleftrightarrow{PF}$ 交 $\overline{A_1A_2}$ 於 $D$ 點, 再連接 $\overleftrightarrow{DM}$ 交 $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ 於 $C$ 點, 且連接 $A$、$D$ 和 $C$、$B$分別交 $\overline{PQ}$ 於 $X$、$Y$ 兩點, 則 $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MY}}=\dfrac{1}{\overline{MP}}-\dfrac{1}{\overline{MQ}}$。(坎迪定理) 若 $\overline{MP}=\overline{MQ}$, 則 $\overline{MX}=\overline{MY}$。(蝴蝶定理) (此定理是作者的創見)

**證明**: 如圖 22, 蝴蝶形 $ABCD$ 可以視爲以兩對角線交點 $M$ 爲中心的四邊形 $PA_4QF$ 之蝴蝶形, 故由定理 5 可知: $\dfrac{1}{\overline{MX}}-\dfrac{1}{\overline{MY}}=\dfrac{1}{\overline{MP}}-\dfrac{1}{\overline{MQ}}$。

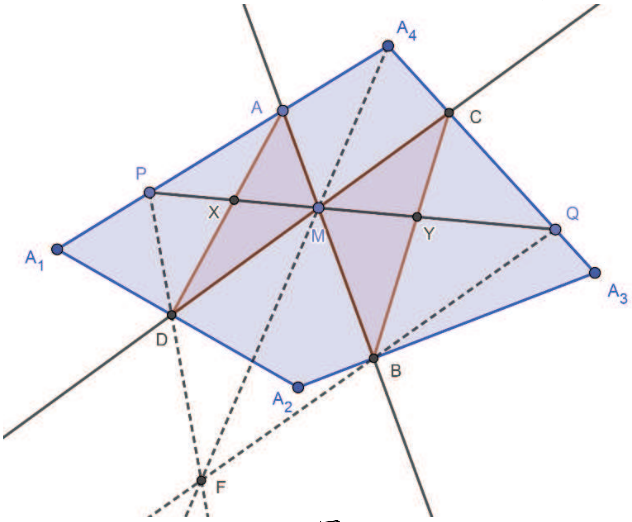


圖22

最後利用三線共點的作圖法, 我們成功將四邊形蝴蝶定理一般化, 只是此時蝴蝶形不一定內接在四邊形的邊上, 也可能接在邊之延長線上。

## 參考資料


1. 張華恩、吳尚澂、葉承恩。正方形內接蝴蝶形的相關性質與研究。第 55 屆全國中小學科展高中數學科作品, 2015。
2. 辛佳佑、廖昱喆、陳威廷。化圓爲方 — 四邊形的蝴蝶定理。第 64 屆全國中小學科展高中數學科作品, 2024。
3. 黃家禮編著。幾何明珠。九章出版社, 195-203。
4. 張景中著。幾何新方法和新體系。科學出版社, 24-34。
5. Sidney Kung, A butterfly theorem for quadrilateral. *Mathematics Magazine*, 2005, 314-316.
6. Zvonko Cerin, On butterflies inscribed in a quadrilateral. *Forum Geometricorum*, Vol. 6 (2006), 241-246. https://forumgeom.fau.edu/FG2006volume6/FG200628.pdf。


—本文作者群爲國立金門高級中學師生—